Nombres complexes

Titre	Description	Remarques
Définition-Rappel	• $\mathbb{C}=\{z\,;\,z=a+ib$ où a et b sont des nombres réels$\}$. On rappelle que $i^2=-1$. • a s'appelle la partie réelle de z, on note $a=\Re e(z)$. b est sa partie imaginaire, on note $b=Im(z)$. • Rappelons que z est réel si et seulement si $Im(z)=0$. z est imaginaire si et seulement $\Re e(z)=0$. z est nul si et seulement si $\Re e(z)=Im(z)=0$. • Pour tout complexe $z=a+ib$ non nul on a : $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$.	On peut appliquer cette formule directement sans passer par l'expression conjuguée.
Conjugué d'un nombre complexe	• Le conjugué du nombre complexe z=a+ib est le nombre complexe noté $\bar{z}=a-ib$ • On a $z=x+iy$ et $\bar{z}=x-iy$ entraine que $z+\bar{z}=2x$ et $z-\bar{z}=2iy$. On a $z\bar{z}=x^2+y^2$. • z est réel si, et seulement si $z=\bar{z}$ z est imaginaire si, et seulement si $z=-\bar{z}$.	
Représentation géométrique d'un nombre complexe	• Pour tout point M(x,y), on peut associer d'une façon unique un seul nombre complexe z=x+iy. z s'appelle l'affixe de M. M est l'image de z. On note z_M = x+iy ou encore M(z). • M(z) et M'($\bar{z}$) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (axe des réels).(l'axe des ordonnées s'appelle l'axe des imaginaires) M(z) et M'(-z) sont symétriques par rapport à l'origine du repère. On rappelle que si I est le milieu du segment $[AB]$ alors $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$ • L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ • L'affixe du vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$ est $z_{\vec{u}}=a+ib$	

Théorème

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan, on a :

- $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est réel $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est imaginaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Module d'un nombre complexe

On munit le plan complexe du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit M d'affixe $z = x+iy$.

Le module de z est le réel positif noté $|z|$ définie par

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Remarquons que $M(x,y)$ et par suite $OM = \sqrt{x^2+y^2}$

et donc on en déduit que $|z| = OM$.

Pour tous points A et B du plan on a :

$$AB = |z_B - z_A|$$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' on a :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $z \neq 0$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $z' \neq 0$
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $|z|^2 = z.\bar{z}$ et $|z| = 1 \Leftrightarrow z.\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Argument d'un nombre complexe

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit M d'affixe $z = x+iy$, non nul et soit θ une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Posons $r = OM$ (donc $r = |z|$). On a $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, il en découle que

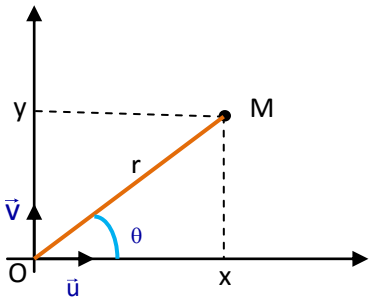
$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

- θ s'appelle l'argument de z.
- $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est l'écriture trigonométrique de z

TuniSchool.tn

On a $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$

et $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul et soit θ un argument de z. On a :

- $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(\lambda.z) = \arg(z) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$, si λ est positif

et $\arg(\lambda.z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$, si λ est négatif.

- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(z^n) = n.\arg(z) + 2k\pi ; n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Formule d'Abraham De Moivre

- Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

C'est la formule de Moivre.

- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

Abraham de Moivre

Abraham de Moivre en 1736

Naissance 26 mai 1667
Vitry-le-François (France)

Décès 27 novembre 1754 (à 87 ans)
Londres (Angleterre)

Domicile Angleterre

Nationalité Français

Champs Mathématiques

Institutions *Royal Society*

Diplôme Académie de Saumur

Renommé pour Formule de Stirling
Théorème de Moivre-Laplace
Formule de Moivre

Ecriture exponentielle d'un nombre complexe

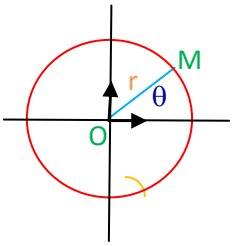
Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Il en découle que :

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
- $e^{i\pi} = -1$.
- Pour tout réel θ et tout entier k on a $e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}$.
- $|e^{i\theta}| = 1$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$.

Remarquons aussi que $ie^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ et $-ie^{i\theta} = e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$.

Tunischool.tn

Propriétés	Soient deux réels θ et θ'. On a • $e^{i\theta}.e^{\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ • $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ • $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ • $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; $n \in \mathbb{Z}$.	
Théorème et définition	Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$, où $r = \lvert z \rvert$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée écriture exponentielle de z 	
Formules d'Euler	$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$	Leonhard Euler (audio), né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe)1, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.

TuniSchool.tn

Les racines nièmes d'un nombre complexe

- Recherche des racines carrées d'un nombre complexe u :

◦ Si u possède une écriture trigonométrique remarquable donc $u = re^{i\alpha}$ avec r est un réel positif, dans ce cas les racines carrées de u sont $u_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $u_1 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

◦ Si $u = a + ib$ (en général) alors pour trouver les racines carrées de u, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

- Soit $a = re^{i\alpha}$; r est un réel positif et α est un réel. Soit n un entier naturel non nul. Les racines nièmes de α sont les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ $z^n = a$,

Ce sont les $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$; $0 \le k \le n-1$.

- Les racines nièmes de l'unité sont les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ $u^n = 1$,

Ce sont les $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$; $0 \le k \le n-1$.

Vous pouvez voir des exemples traités dans les vidéos (cours complexe)

Exercice :

1/ Déterminer les racines cubiques de a= $2(-1+i)$

2/ Mettre ces solutions sous forme algébrique.

3/ En déduire les valeurs de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

Solution :

1/ $r = |2(1-i)| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \arg(2(1-i) = \frac{3\pi}{4}$, $n = 3$. Les racines cubiques de a sont les $z_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$; $0 \le k \le 2$.

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{4}}$

2/ $z_0 = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$ =1+i

$z_k^3 = z_0^3 \Rightarrow (\frac{z_k}{z_0})^3 = 1$ donc $\frac{z_k}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$; $0 \le k \le 2$ d'où

TuniSchool.tn

	$z_k = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ K=0 $\Rightarrow z_0 = z_0$ K=1 $\Rightarrow z_1 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1+i)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ K=2 $\Rightarrow z_2 = z_0 e^{i\frac{4\pi}{3}} = (1+i)(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 3/ $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et donc par identification on a : $= \cos(\frac{11\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{11\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.	
Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2+bz+c=0$ $a\neq 0$	• a, b et c sont trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. L'équation $az^2+bz+c=0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions définies par $z' = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z'' = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2-4ac$. •Si z' et z" sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$; $a\neq 0$, alors $az^2+bz+c = a(z-z')(z-z'')$, $S = z'+z'' = -\frac{b}{a}$ et $P = z'.z'' = \frac{c}{a}$.	
Equations de degré ≥ 3	$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$ et $n \geq 3$. Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$. Si z_0 est un zéro de P alors $P(z) = (z-z_0).Q(z)$ où Q(z) est de la forme $b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + ... + b_1 z + b_0$ et $(b_{n-1} = a_n)$; $b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ sont des nombres complexes.	Vous pouvez voir des exemples traités dans les vidéos (cours complexe)

TuniSchool.tn